Tentamen Vectoranalyse

5 juli 2007, 14:00-17:00 uur

Het tentamen bestaat uit de onderstaande **vier** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (10+7+8 pt.)
Het oppervlak S is gegeven door de vergelijking

$$z^4 - 4z + f(x,y) = 0,$$

waarbij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie is. De oorsprong $(0,0,0)$ ligt op S.

1. Gegeven is dat het raakvlak aan S in $(0,0,0)$ door $(2,2,1)$ gaat, en evenwijdig is aan de x-as. Bereken
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ en } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

2. Verder is gegeven dat $f(x,y) \neq 3$, voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bewijs dat het oppervlak S in een omgeving van elk punt $(x_0,y_0,z_0) \in S$ geschreven kan worden als $z = g(x,y)$, waarbij g een C^1-functie is.

3. Laat g de functie zijn uit onderdeel 2 die S beschrijft in een omgeving van het punt $(0,0,0)$. (De gegevens van de eerste twee onderdelen gelden nog steeds.) Bereken de eerste-orde partiële afgeleiden van g in $(0,0)$.

Opgave 2 (10+7+8 pt.)
De functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
Het boloppervlak S is gegeven door $g(x,y,z) = 0$, met $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

1. Toon aan dat f op S zes kritieke punten heeft.

2. Bepaal de maximale en minimale waarde van f op S, en toon aan dat zowel het maximum als het minimum in twee verschillende (kritieke) punten wordt aangenomen.

3. Toon aan dat de overige (twee) kritieke punten van f op S geen locale extrema zijn (gebruik hierbij de Hessianen van f en g).

Z.O.Z.

Opgave 3 (10+10 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3$ is gegeven door:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = ayz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}, \tag{1}$$

waarbij a een constante is. Het boloppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \tag{2}$$

1. Voor $-1 < b < 1$ is C_b de doorsnijding van het vlak $z = b$ en het boloppervlak S. Bereken
$$\int_{C_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

2. Bewijs dat voor elke gesloten C^1-kromme C op S geldt:
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{d.e.s.d.a.} \quad a = 1.$$

Opgave 4 (10+10 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3$ is weer gegeven door (1), en het boloppervlak S door (2), zie opgave 3.

1. Bewijs dat voor dit vectorveld $\mathbf{F}$ en elk gesloten glad oppervlak Σ geldt:
$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

2. Voor $-1 < b < 1$ is S_b het gedeelte van S dat boven het vlak $z = b$ ligt, d.w.z.
$$S_b = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq b\}.$$
Bewijs dat voor $-1 < b < 1$ geldt:
$$\iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$